به نام خدا

معرفی متغیرهای تصادفی پرکاربرد

- متغیرهای تصادفی پیوسته

- متغیر تصادفی گوسی یا نرمال

$$X \sim N(m, \sigma^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

با توجه به کاربرد گسترده متغیر تصادفی گوسی در تابع چگالی احتمال آن ، توابعی در ارتباط
با متغیر تصادفی گوسی استاندارد یعنی یک متغیر تصادفی گوسی با میانگین صفر و واریانس 1
تعریف شده است که در ادامه به معرفی آنها می پردازیم .

این توابع به صورت جدول هایی درآمده اند و در منابع مختلف برای استفاده در دسترس
هستند.

همان طور که گفتیم این توابع در ارتباط با یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد به صورت

$$Y \sim N(0,1)$$

تعریف شده اند. برای اینکه بتوانیم از این توابع برای هر متغیر تصادفی نرمال

دلخواه به صورت $X \sim N(m, \sigma^2)$ استفاده کنیم، لازم است که رابطه بین

توابع احتمال، این دو متغیر تصادفی را پیدا کنیم.

می دانیم که

$$X = aY + b$$

$$Y \sim N(0,1) \implies f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

(تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد)

می‌خواهیم تابع چگالی احتمال X را برحسب تابع چگالی احتمال Y به دست بیاوریم. برای این منظور، ابتدا تابع توزیع احتمال X را پیدا می‌کنیم و از آن مشتق می‌گیریم.

$$F_X(x) = P_r\{X \le x\} = P_r\{aY+b \le x\}$$

$$= P_r\left\{Y < \frac{x-b}{a}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_Y(\alpha)\,d\alpha$$

$a>0$

احتمال هر پیشامدی در ارتباط با Y برابر است با
انتگرال تابع چگالی احتمال Y روی آن ناحیه

$$\Rightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \, d\alpha$$

تغییر متغیر

$$\beta = a\alpha + b \longrightarrow \begin{cases} d\beta = a\,d\alpha \\ \alpha = \dfrac{\beta - b}{a} \end{cases}$$

$X = aY + b$

$dx = a\,dy$

$$\Rightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\beta-b)^2}{2a^2}} \frac{1}{a} \, d\beta$$

$$\Rightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{(\beta-b)^2}{2a^2}\right)} d\beta$$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad X \sim N(b, a^2)$$

$$Y \sim N(0,1) \xrightarrow{X = aY + b} X \sim N(b, a^2)$$

$$Y \sim N(0,1) \xrightarrow[X = \sigma Y + m]{?} X \sim N(m, \sigma^2)$$

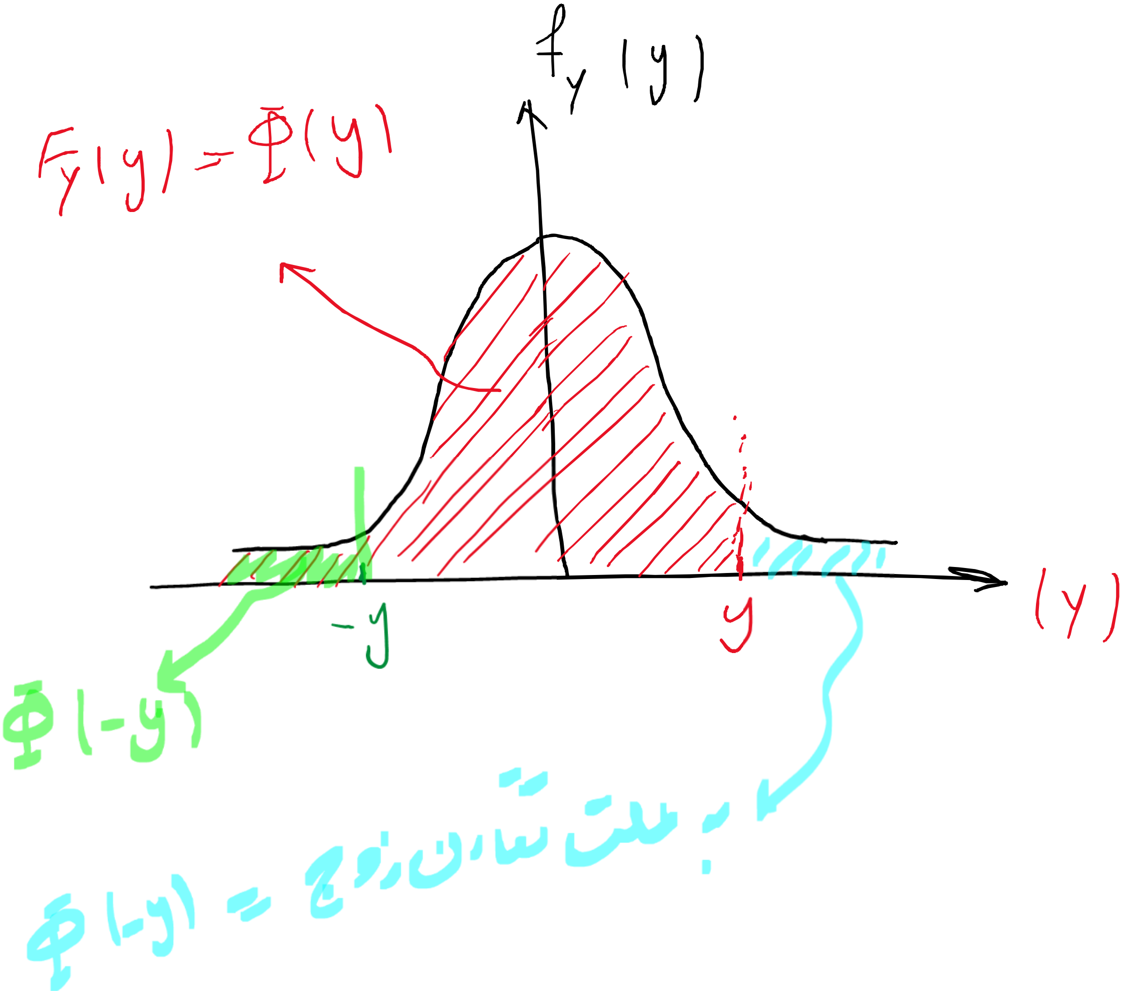
در ادامه ابتدا توابعی که در ارتباط با متغیر تصادفی نرمال استاندارد Y تعریف می‌شوند را معرفی می‌کنیم. سپس با کمک رابطه بالا برای حل مسائل از آنها استفاده می‌کنیم.

1) $F_Y(y)$

اولین تابعی که برای کار کردن با متغیرهای تصادفی گوسی تعریف می‌شود تابع $F_Y(y)$ است.

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \, d\alpha = P_r\{Y \le y\}$$

$$\triangleq \Phi(y) \equiv G(y)$$



درمورد $\Phi(y)$ توجه به نکته زیر اهمیت دارد.

$$\Phi(-|y|) = 1 - \Phi(|y|) \quad (1$$

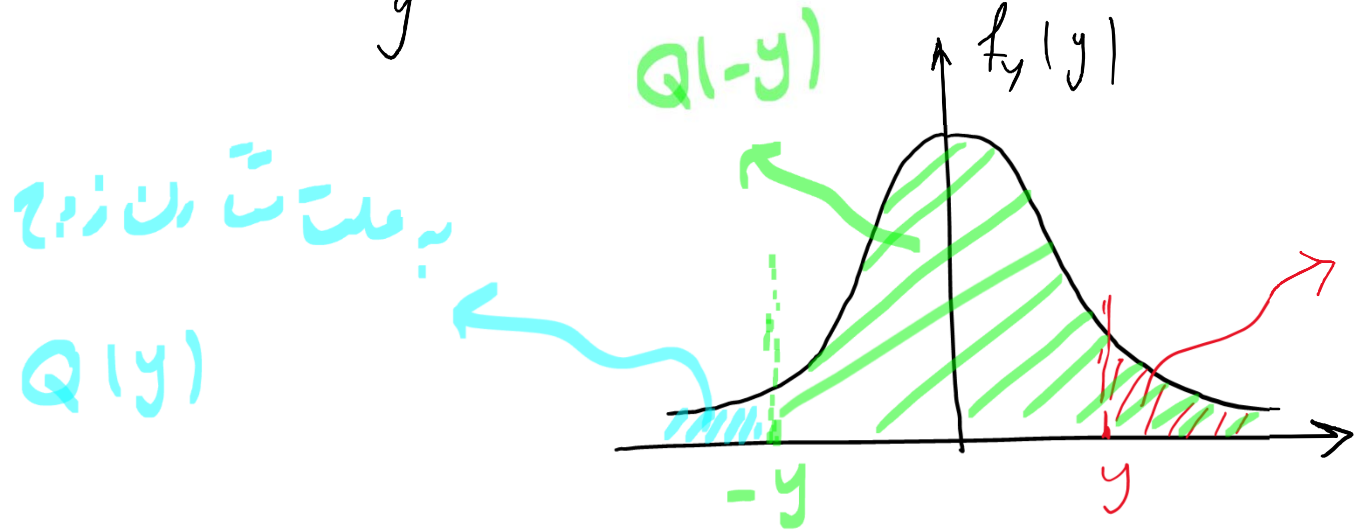
$$X \sim N(m, \sigma^2)$$

2) $\Phi(y) = P_r\{Y \leqslant y\}$, $Y \sim N(0, 1)$ $\Longrightarrow P_r\{X \leqslant x\} = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$

2) Q-function $Q(y)$

تابع $Q(\cdot)$ در ارتباط با یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Q(y) = \int_y^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \, d\alpha = P_r\{Y > y\} = 1 - \Phi(y)$$



برای آنچه $Q(\cdot)$ نیز داریم

1) $Q(-|y|) = 1 - Q(|y|)$

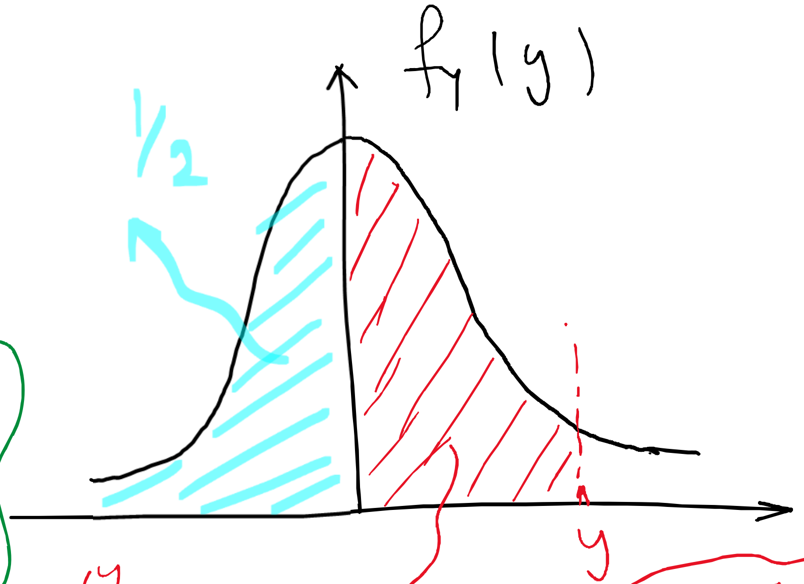
2) $P_r\{Y > y\} = Q(y)$, $Y \sim N(0,1)$

$$X \sim N(m, \sigma^2) \Longrightarrow P_r\{X > x\} = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

3) error function , erfc(·)

تابع دیگری که در ارتباط با متغیر تصادفی نرمال استاندارد Y تعریف می‌شود،
تابع error function است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{erfc}(y) = \int_0^y \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} \, d\alpha$$



$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

$$d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} d\beta$$

$$\int_0^y f_Y(\beta) d\beta$$

$$\alpha^2 = \frac{\beta^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

$Q(y) = 1 - \Phi(y)$

$$\Longrightarrow \quad Q(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

همان طور که دیدیم ، بین این توابع ، روابطی با یکدیگر برقرار است . بنابراین از
هر کدام از این توابع ، می توانیم در رابطه ها با متغیرهای تصادفی گوسی ، استفاده کنیم .

مثال : در سیستم های کاربردی ، نویز جمع شونده در ورودی گیرنده به صورت یک متغیر تصادفی گوسی ، مدل سازی می شود. فرض کنیم در یک سیستم کاربردی ، نویز جمع شونده گوسی ، یک متغیر تصادفی گوسی با میانگین صفر و انحراف معیار $2/3$ باشد. احتمال پیشامدهای زیر را برای این متغیر تصادفی به دست بیاورید.

$$X \sim N\left(0, \left(\tfrac{2}{3}\right)^2\right) \equiv N\left(0, 4/9\right)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{9}\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{8/9}\right)$$

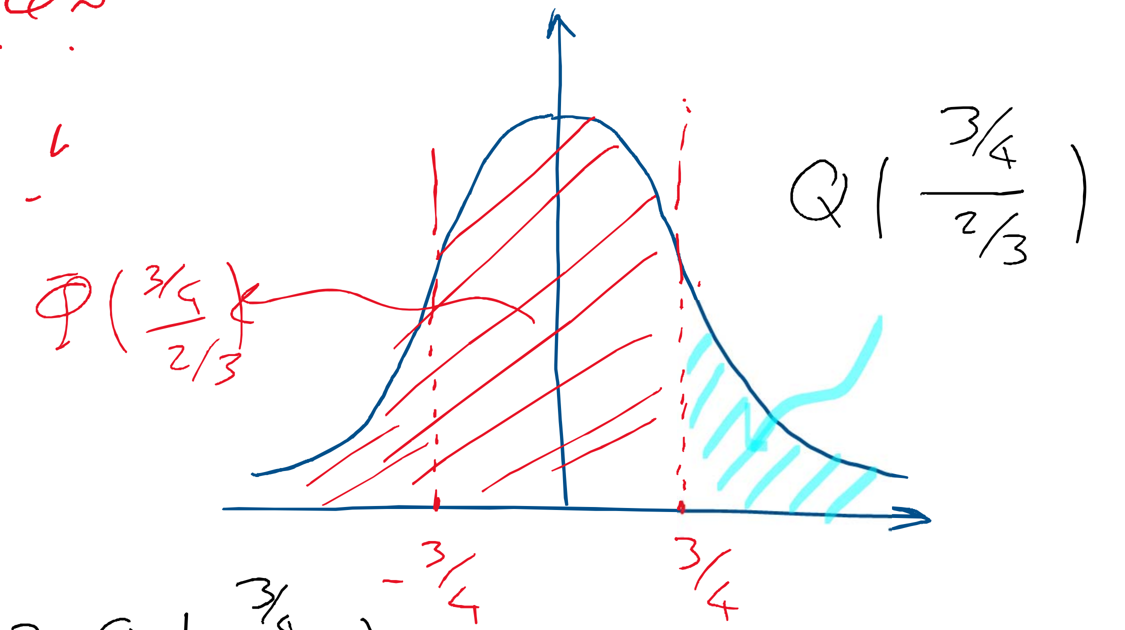
1) $P_r\left\{ |X| \le \frac{3}{4} \right\}$

احتمال اینکه اندازه‌ی نویز کمتر از 3/4 باشد.

$$P_r\left\{ |X| \le \frac{3}{4} \right\} = P_r\left\{ -\frac{3}{4} \le X \le \frac{3}{4} \right\}$$

$$= \int_{-3/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{9}\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8/9}\right) d\alpha$$

به جای محاسبه انتگرال می‌توانیم از توابع $Q(\cdot)$ یا $\Phi(\cdot)$
یا $\mathrm{erfc}(\cdot)$ استفاده کنیم.



$$P_r\left\{|X| \leq \frac{3}{4}\right\}$$

$$= P_r\left\{-3/4 \leq X \leq 3/4\right\} = 1 - 2Q\left(\frac{3/4}{2/3}\right) = 1 - 2Q\left(\frac{9}{8}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{3/4}{2/3}\right) - \Phi\left(\frac{-3/4}{2/3}\right) = 2\Phi\left(\frac{9}{8}\right) - 1$$

$$X \sim N(0, 2/3)$$

$$P_r\{Y \le y\} = \Phi(y)$$

$$X \sim N(m, \sigma^2), \quad P_r\{X \le x\} = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

* در این سیستم مخابراتی، محاسبه کنید که سطح نویز با احتمال ۹۹٪ از چه میزانی بالاتر نخواهد بود.

$$P_r\{X < \overset{?}{x}\} = 0.99$$

$$P_r\{X < x\} = \Phi\left(\frac{x}{2/3}\right) = 0.99$$

2.326 بازم معادل

$$\Rightarrow \frac{x}{2/3} = \Phi^{-1}(0.99) \Rightarrow x = \frac{2}{3}\,\Phi^{-1}(0.99)$$

$$\Phi(2.326) = 0.99$$

$$P_r\{X \leq x\} = 1 - Q\left(\frac{x}{2/3}\right) = 0.99$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{x}{2/3}\right) = 0.01 \Rightarrow x = \frac{2}{3}\,Q^{-1}(0.01)$$

* حساب کنید که اندازه نویز با احتمال 0.99 از چه مقداری بیشتر نخواهد شد.

$$P_r\{|X| \le x\} = 0.99$$

$$P_r\{|X| \le x\} = 1 - 2Q\left(\frac{x}{2/3}\right) = 2\Phi\left(\frac{x}{2/3}\right) - 1 = 0.99$$

$$Q\left(\frac{x}{2/3}\right) = 0.005 \implies x = \frac{2}{3}Q^{-1}(0.005)$$

$$\Phi\left(\frac{x}{2/3}\right) = \frac{1.99}{2} \implies x = \frac{2}{3}\Phi^{-1}\left(\frac{1.99}{2}\right)$$

تمرین: مثال‌های حل شده را برحسب $erfc(\cdot)$ نیز به دست بیاورید.

2) متغیر تصادفی نمایی   exponential

متغیر تصادفی نمایی X ، با تابع چگالی احتمال به صورت زیر شناخته می‌شود

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & oth. \end{cases}$$

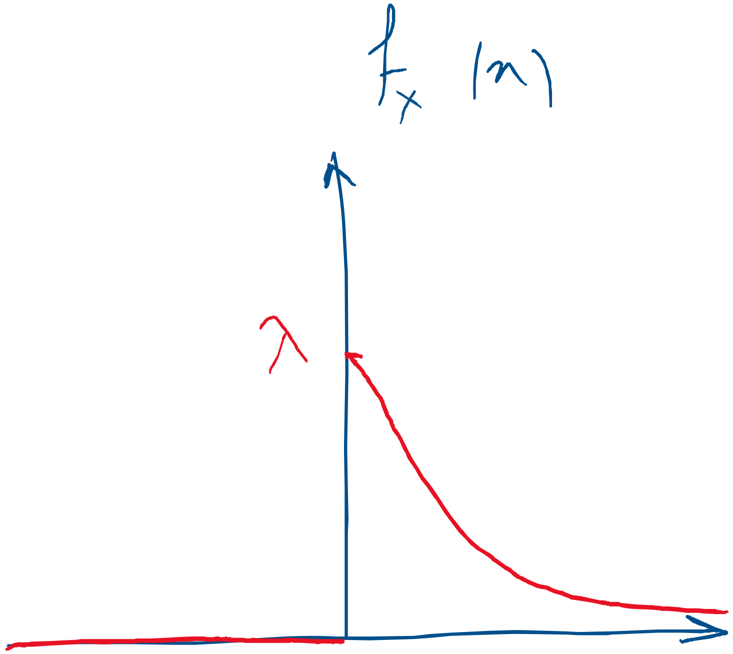
$$\Longrightarrow \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad u(x)$$

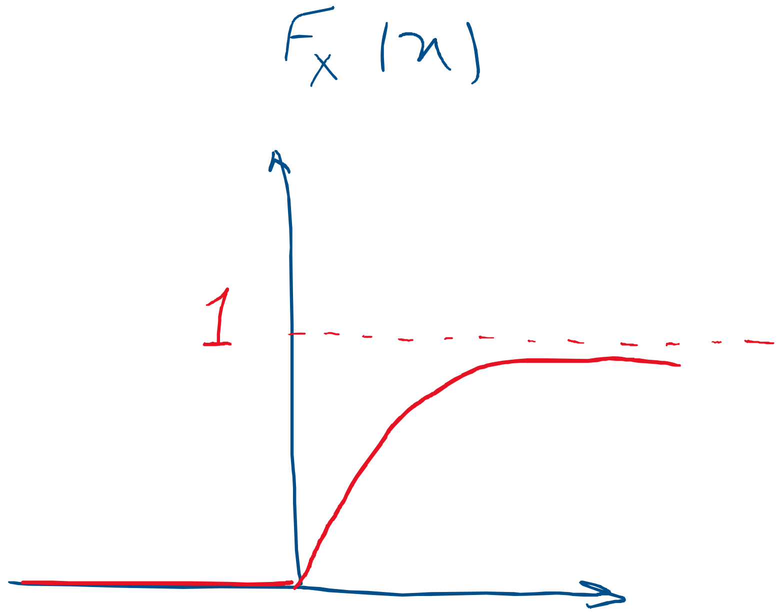
تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی نمایی به صورت زیر است :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda \alpha}\, d\alpha$$

$$= -e^{-\lambda \alpha}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda x} = F_X(x) \qquad x \geq 0$$

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\, u(x)$$





متغیر تصادفی نمایی با
که پارامتر λ به صورت اساسی
کامل مشخص می‌شود.

$$X \sim \text{exponential}(\lambda)$$

یا

$$X \sim \exp(\lambda)$$

متغیر تصادفی نمایی، یکی دیگر از متغیرهای تصادفی پرکاربرد در حوزه مهندسی است زیرا بسیاری از پارامترهای سیستم‌های را می‌توان با کمک متغیر تصادفی نمایی مدل‌سازی کرد. به عنوان مثال در یک شبکه مخابراتی بی‌سیم (یا سیار) زمان درخواست اتصال به شبکه توسط یک کاربر، زمان درخواست برقراری ارتباط (request to call) فاصله زمانی بین دو درخواست برقراری ارتباط در بازه‌ی زمانی یک تماس تلفنی را می‌توان به صورت یک متغیر تصادفی نمایی، مدل‌سازی کرد. به طور کلی زمان ورود به یک صف و زمان انتظار در یک صف متغیرهای تصادفی نمایی هستند.